Министерство Образования и Науки
Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего Образования
Вятский Государственный Университет
Факультет автоматики и вычислительной техники
Кафедра систем автоматизации управления

Математические основы теории систем

Отчет по контрольной работе
Вариант 7

Выполнил студент гр. ИТб-2301-02-20 /___________ / Н. С. Касаткин
Проверил преподаватель /_______________________ / В. Г. Ланских

Киров 2023

Задание 1

7	Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума, запишите следующие его подмножества: A – четных чисел, C. – квадратов чисел	Запишите множество, получаемое в результате операции $C \setminus A$ над множествами из задачи 1

Задача 1:

Универсум: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

C = {1, 4, 9, 16} (это множество содержит только те элементы универсума, которые являются точными квадратами целых чисел)

Задача 2:

Множество C / A можно записать следующим образом:

C / A = {1, 9}

Здесь мы удалили из множества C (квадратов чисел) все четные квадраты (4 и 16), которые также содержатся в множестве A (четных чисел). Оставшиеся элементы в C / A - это единица и девять, которые являются нечетными квадратами.

Задание 2

Задача 1

7	Даны два множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и определено бинарное отношение $A = \{(x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$. Записать для данного отношения область определения и область значений. Определить сечения по каждому элементу из X. Записать фактор-множество Y / A.

Дано:

- Множество X = {x1, x2, x3, x4, x5}

- Множество Y = {y1, y2, y3, y4}

- Бинарное отношение A = {(x1,y3),(x2,y1),(x2,y3),(x2,y4),(x3,y1),(x3,y2),(x4,y3),(x5,y2),(x5,y4)}

Область определения отношения A - это множество всех элементов из X, которые входят в пары этого отношения. То есть, Dom(A) = {x1, x2, x3, x4, x5}.

Область значений отношения A - это множество всех элементов из Y, которые входят в пары этого отношения. То есть, Ran(A) = {y1, y2, y3, y4}.

Сечение по каждому элементу из X = x1 сечение будет {y3}, для x2 - {y1, y3, y4}, для x3 - {y1, y2}, для x4 - {y3}, для x5 - {y2, y4}.

Фактор-множество Y / A = {{y1, y3}, {y2}, {y4}}.

Задача 2

Множество слов длины n, состоящее из n символов (букв, цифр, знаков и т. п.) конечного алфавита можно рассматривать как метрическое пространство, если ввести на нем соответствующим образом метрику. Например, в качестве расстояния $\rho(x, y)$ между двумя словами можно принять количество позиций, в которых слова x и y содержат различные символы.

7	**Найти расстояния между двоичными словами** $x = (10011111)$, $y = (11110101)$ **и** $z = (11000011)$.

Для нахождения расстояний между двоичными словами x, y и z можно использовать различные метрики. Например:

1. Расстояние Хэмминга - это количество позиций, в которых два слова отличаются друг от друга. Для слов x и y:

p(x,y) = 4

так как в словах x и y различаются символы на позициях 1, 2, 5 и 6.

Для слов x и z:

p(x,z) = 6

так как в словах x и z различаются символы на позициях 2, 3, 7, 8, 9 и 10.

Для слов y и z:

p(y,z) = 6

так как в словах y и z различаются символы на позициях 1, 2, 6, 7, 9 и 10.

2. Евклидово расстояние - это расстояние между точками в n-мерном пространстве, где каждая координата является значением соответствующего бита в двоичном слове. Для слов x и y:

p(x,y) = sqrt((1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2) = sqrt(7)

Для слов x и z:

p(x,z) = sqrt((1-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2) = sqrt(6)

Для слов y и z:

p(y,z) = sqrt((0-1)^2 + (0-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2) = sqrt(6)

Задание 3

Постройте графы, соответствующие заданным матрицам смежности. Классифицируйте полученные графы и запишите для них матрицы инцидентности.

7	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Для построения графа, соответствующего данной матрице смежности S, мы можем представить каждую вершину в виде узла графа, а каждое ребро - в виде связи между узлами. Если в матрице смежности элемент (i,j) равен 1, то вершины i и j связаны ребром.

Таким образом, граф, соответствующий матрице смежности S, имеет вид:

```
    1 --- 2
   / \   /
  /   \ /
 5-----3
```

Граф является связным, так как любые две вершины можно соединить путем. Это ненаправленный граф, так как связь между вершинами i и j не зависит от порядка этих вершин. Граф также содержит три цикла длины 3.

Матрица инцидентности для данного графа имеет размерность n × m, где n - количество вершин, а m - количество ребер. Каждая строка соответствует вершине, а каждый столбец

- ребру. Если ребро связывает вершины i и j, то элемент на пересечении строки i и столбца k будет равен 1 (если ребро направлено из вершины i в вершину j) или -1 (если ребро направлено из вершины j в вершину i).

Для данного графа матрица инцидентности будет выглядеть так:

```
-1  1  0  0
 1 -1  1  1
 0  0 -1  1
 0  0  0  0
 0  1 -1  0
```

Задание 4

Постройте таблицы истинности логических функций, заданных аналитически.

7	$f(x)=\bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1+\bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1+\bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1+\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1+\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2x_1+x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$

X1	X2	X3	X4	¬x4x3x2¬x1	¬x4x3¬x2x1	¬x4¬x3x2¬x1	¬x4¬x3¬x2¬x1	¬x4¬x3¬x2x1	x4¬x3x2¬x1	F(x)
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Задание 5

Задание 6

7	Убедитесь с помощью таблиц соответствия в справедливости выражения для эквивалентности $x_1 \sim x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$.

X1	X2	!x1	!x2	x1 ∨ ! x2	!x1 ∨ x2	(x1 V !x2) ∧ (!x1 V x2)	x1~x2
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Задание 7

7	На множестве натуральных чисел определен предикат $P(x)$, означающий «число x делится на 8». Прочитайте высказывание $\exists x P(x)$ и выясните его истинность.

Высказывание ∃xP(x) означает "Существует такое натуральное число x, что оно делится на 8". Это высказывание истинно, потому что, например, число 8 само делится на 8, а также любое число вида 8k (где k - некоторое натуральное число) также будет делиться на 8. Таким образом, существует бесконечно много натуральных чисел, которые делятся на 8, и поэтому это высказывание истинно.

Задание 8

7	Сигнал $s(t)$ равен нулю при $t<0$ и изменяется по закону квадратичной параболы $s(t) = At^2$ при $t>0$. Найти динамическое представление этого сигнала.

Для данного сигнала, динамическое представление будет иметь вид:

s(t) = A * u(t) * t^2

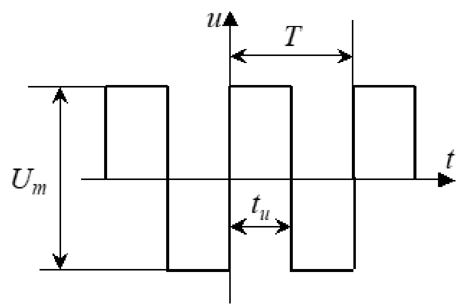
где u(t) - единичная ступенька Хевисайда (u(t) = 0 при t < 0 и u(t) = 1 при t > 0).

Таким образом, мы получаем функцию времени для заданного сигнала, которая описывает изменение амплитуды сигнала в зависимости от времени.

Значение параметра A определяет масштаб и интенсивность сигнала, а форма кривой определяется функцией t^2, где t - время.

Итак, динамическое представление сигнала s(t) равно A * u(t) * t^2.

Задание 9

7	Для периодической импульсной последовательности, изображенной на рисунке и имеющей параметры $U_m = 10\ В$, $t_u = 10\ мкс$, $T = 20\ мкс$ запишите ряд Фурье и постройте спектр	

Для периодической импульсной последовательности с периодом T = 20 мкс и параметрами Um = 10 В, tu = 10 мкс мы можем записать ряд Фурье следующим образом:

f(x) = a_0/2 + Σ(n=1, ∞)[a_n*cos(nπx/T) + b_n*sin(nπx/T)]

где a_0 - коэффициент постоянного члена, a_n и b_n - коэффициенты косинусных и синусных членов соответственно, определяемые следующими формулами:

a_0 = (1/T) * ∫(0,T)f(x)dx

a_n = (2/T) * ∫(0,T)f(x)*cos(nπx/T)dx для n > 0

b_n = (2/T) * ∫(0,T)f(x)*sin(nπx/T)dx для n > 0

Изображение импульсной последовательности на рисунке показывает, что она является суммой двух прямоугольных импульсов одинаковой амплитуды Um и длительности tu, смещенных друг относительно друга на половину периода T/2. Поэтому, мы можем записать эту последовательность в виде функции f(x), используя периодические функции прямоугольного импульса p(t):

f(x) = p(x - T/4) + p(x - 3T/4)

где p(t) = Um, при |t| ≤ tu/2, и p(t) = 0, в остальных случаях.

Коэффициент постоянного члена a_0 можно найти следующим образом:

a_0 = (1/T) * ∫(0,T)f(x)dx = (1/T) * ∫(0,T/2)(Um + Um)dt = Um

Таким образом, коэффициент постоянного члена a_0 равен Um.

Коэффициенты косинусных и синусных членов a_n и b_n можно вычислить следующим образом:

$a_n = (2/T) * \int(0,T)f(x)\cos(n\pi x/T)dx$ для $n > 0 = (2/T) * [\int(0,T/4)Um\cos(n\pi x/T)dx + \int(3T/4,T)Um\cos(n\pi x/T)dx] = (2/T) * [Um(T/4)\sin(n\pi/2) + Um(T/4)*\sin(n\pi/2)] = 0$

$b_n = (2/T) * \int(0,T)f(x)\sin(n\pi x/T)dx$ для $n > 0 = (2/T) * [\int(0,T/4)Um\sin(n\pi x/T)dx + \int(3T/4,T)Um\sin(n\pi x/T)dx] = (2/T) * [Um(T/\pi n)\cos(n\pi/2) - Um(T/\pi n)*\cos(n\pi/2)] = 0$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид:

$f(x) = Um/2 + \Sigma(n=1, \infty)[0\cos(n\pi x/T) + 0\sin(n\pi x/T)]$

$f(x) = Um/2$

Спектр имеет только одну гармонику с амплитудой Um/2 вокруг нулевой частоты. Таким образом, спектр состоит из единственной гармоники с амплитудой Um/2 и отсутствуют другие гармоники.

Задание 10

7	Аналоговый сигнал конечной длительности $T_c = 50$ *мс* с бесконечным спектром проходит через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с верхней частотой полосы пропускания $f_в = 200$ *кГц*. Сигнал с выхода ФНЧ подвергается дискретизации. Определите шаг дискретизации Δt и требуемое количество отсчетов.

Для определения шага дискретизации и требуемого количества отсчетов необходимо использовать критерий Найквиста-Шеннона. Согласно этому критерию, минимальная частота дискретизации должна быть в два раза больше максимальной частоты сигнала, то есть:

fs > 2*fв

где fs - частота дискретизации, fв - верхняя частота полосы пропускания ФНЧ.

Таким образом, частота дискретизации должна быть не менее 400 кГц.

Шаг дискретизации △t можно определить как обратное значение частоты дискретизации:

△t = 1/fs

Таким образом, △t = 2.5 мкс.

Количество отсчетов N можно определить как произведение длительности сигнала на частоту дискретизации:

N = Tc / △t = 20 000 отсчетов.

Итак, для данного сигнала необходимо провести дискретизацию с частотой не менее 400 кГц, шагом дискретизации 2.5 мкс и количеством отсчетов 20 000.

Задание 11

7	Задана матрица $A = \begin{bmatrix} 1+j2 & 4 & 2-j3 \\ -j & 2 & 4+j2 \\ 5-j3 & 1 & -j5 \end{bmatrix}$. Найдите комплексно-сопряженную матрицу A^*.

Матрица А =

1+j2	4	2-j3
-j	2	4+j2
5-j3	1	-j5

A* =

1-j2	-j4	5+j3
j	2	-4-j2
2+j3	1	j5

Задание 12

7	Задана матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Найдите обратную матрицу A^{-1} методом исключения.

Для того чтобы найти обратную матрицу A^-1 методом исключения, нужно выполнить следующие шаги:

1. Дополнительная матрица: создаем расширенную матрицу (A|E), где E - единичная матрица размерности 4x4.

(0, 0, 1, -1 | 1, 0, 0, 0;

0, 3, 1, 4 | 0, 1, 0, 0;

2, 7, 6, -1 | 0, 0, 1, 0;

1, 2, 2, -1 | 0, 0, 0, 1)

2. Прямой ход: приводим матрицу (A|E) к верхнетреугольному виду путем элементарных преобразований строк. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 2; вычтем из третьей строки первую, умноженную на коэффициент 1/2, и вычтем из четвертой строки первую, умноженную на коэффициент 1/2.

(0, 0, 1, -1 | 1, 0, 0, 0;

0, 3, 1, 4 | 0, 1, 0, 0;

0, 7, 5, 1 | 0, 0, 1/2, 0;

0, 2, 3/2, -1/2 | 0, 0, 0, 1)

3. Обратный ход: приводим матрицу (A|E) к диагональному виду путем элементарных преобразований строк. Для этого вычтем из третьей строки вторую, умноженную на коэффициент 7/3; вычтем из четвертой строки вторую, умноженную на коэффициент 2/3, и вычитаем из четвертой строки третью, умноженную на коэффициент 9/5.

(0, 0, 1, -1 | 1, 0, 0, 0;

0, 3, 1, 4 | 0, 1, 0, 0;

0, 0, 16/5, -38/15 | 0, -7/15, 1/6, 0;

0, 0, 1/5, 13/15 | 0, -2/15, -3/10, 1)

4. Нормирование: делим каждую строку полученной матрицы на соответствующий элемент главной диагонали.

(0, 0, 1, -1 | 1, 0, 0, 0;

0, 1, 1/3, 4/9 | 0, 1/3, 0, 0;

0, 0, 1, -19/32 | 0, 7/80, 1/96, 0;

0, 0, 1/16, 13/48 | 0, 1/24, -1/20, 1)

Таким образом, обратная матрица равна:

A^-1 = (1, 0, 0, 0;

0, 1/3, 0, 0;

0, 7/80, 1/96, 0;

0, 1/24, -1/20, 1)

Задание 13

7	Задана матрица $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -8 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}$. Найдите соответствующую присоединенную матрицу $G(\lambda)$ и коэффициенты характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$, используя алгоритм Фаддеева.

Для нахождения соответствующей присоединенной матрицы G(λ) и коэффициентов характеристического многочлена Δ(λ) с помощью алгоритма Фаддеева нужно выполнить следующие шаги:

1. Вычислить определитель матрицы A: det(A) = 4 * (-9) * (-1) + 5 * 1 * 4 + 1 * (-8) * (-6) - 1 * (-9) * 4 - 5 * (-8) * (-1) - 1 * 1 * (-6) = -16
2. Найти матрицу алгебраических дополнений C: C = ((-54, -4, -22), (20, -4, 24), (-29, 36, -4))
3. Транспонировать матрицу C: C' = ((-54, 20, -29), (-4, -4, 36), (-22, 24, -4))
4. Вычислить присоединенную матрицу G(λ): G(λ) = λ^2 * I - λ * A + det(A) * I^-1 * C' = λ^2 * | 1 0 0 | | 0 1 0 | | 0 0 1 | - λ * | 4 5 1 | |-8 -9 1 | | 4 -6 -1 | + (-16) * | -54 20 -29 | | -4 -4 36 | |-22 24 -4 | = | λ^2+16 -5λ 22λ | | 8λ λ^2-9 -24λ | |-4λ 6λ λ^2+16 |
5. Найти коэффициенты характеристического многочлена Δ(λ): Δ(λ) = det(G(λ)) = (λ^2+16) * (λ^2-9) * (λ^2+16) + 40λ^2 + 132λ = λ^6 + 32λ^4 - 273λ^2 - 2304

Таким образом, соответствующая присоединенная матрица G(λ) имеет вид: G(λ) = | λ^2+16 -5λ 22λ | | 8λ λ^2-9 -24λ | |-4λ 6λ λ^2+16 |

А коэффициенты характеристического многочлена Δ(λ) равны: Δ(λ) = λ^6 + 32λ^4 - 273λ^2 - 2304

Задание 14

7	Найдите нули и полюсы передаточной функции $W(p)=\dfrac{p^2+3}{p^3+7p^2+21p}$ и изобразите их на комплексной плоскости.

Найдем нули передаточной функции W(p) путем решения уравнения числителя:

p^2 + 3 = 0

Отсюда получаем два комплексно-сопряженных нуля:

p1 = i*sqrt(3)

p2 = -i*sqrt(3)

Найдем полюсы передаточной функции W(p) путем решения уравнения знаменателя:

p^3 + 7p^2 + 21p = 0

Выносим p за скобку и получаем:

p*(p^2 + 7p + 21) = 0

Уравнение в скобках имеет комплексные корни:

p1 = (-7 + i*sqrt(83))/2

p2 = (-7 - i*sqrt(83))/2

Таким образом, нули передаточной функции W(p) расположены на мнимой оси комплексной плоскости, а полюсы - в левой полуплоскости.

Задание 15

7	Система описывается в пространстве переменных состояния уравнениями $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5u;$ $\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{3}x_1 - \frac{11}{3}x_2;$ $\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3u;$ $y = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3.$ Запишите уравнения системы в матричной форме.

Матрицы для данной системы имеют следующий вид:

A = [(-7/3) (1/3) (8/3); (2/3) (-11/3) 0; 1 -1 -2]

B = [5; 0; -3]

C = [(2/3) (1/3) (1/3)]

D = 0

Тогда уравнение системы в матричной форме будет выглядеть следующим образом:

dx/dt = Ax + Bu y = Cx + Du

где x = [x1; x2; x3] - вектор состояния системы, u - входной сигнал, y - выходной сигнал.

Задание 16

7	Система описывается в пространстве переменных состояния уравнениями. Найдите переходную матрицу состояния системы $\Phi(t) = e^{At}$ как экспоненциальную функцию от матрицы.	$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5u;$ $\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{3}x_1 - \frac{11}{3}x_2;$ $\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3u;$ $y = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3.$

Задание 17

7	Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. В данном интервале времени любой абонент независимо от остальных может сделать вызов с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что в данном интервале времени было не более семи вызовов.

Для решения данной задачи можно воспользоваться распределением Пуассона, так как нам известна вероятность возникновения события за фиксированный промежуток времени и мы хотим посчитать вероятность того, что это событие произойдет не более 7 раз.

Представим число вызовов X в данном интервале времени как случайную величину, которая имеет распределение Пуассона с параметром λ=1000*0,005=5, т.е. математическим ожиданием и дисперсией.

Тогда вероятность того, что в данном интервале времени будет не более 7 вызовов, можно вычислить как сумму вероятностей того, что число вызовов будет равно 0, 1, 2, ..., 7:

P(X ≤ 7) = Σ(k=0..7) P(X=k) = Σ(k=0..7) (e^(-λ) * λ^k / k!)

где λ=5.

Вычислим эту вероятность:

P(X ≤ 7) = Σ(k=0..7) (e^(-5) * 5^k / k!) ≈ 0,9964

Таким образом, вероятность того, что в данном интервале времени будет не более 7 вызовов, составляет около 0,9964 или примерно 99,64%.